

Programación Cónica de Segundo Orden Para la Solución de Flujos Óptimos de Potencia

Alan Ortiz Contreras
Instituto Politécnico Nacional
Sección de Estudios de Posgrado
e Investigación ESIME Zacatenco
Ciudad de México, México
Email: aortizc0903@alumno.ipn.mx

Mohamed Badaoui
Instituto Politécnico Nacional
Sección de Estudios de Posgrado
e Investigación ESIME Zacatenco
Ciudad de México, México
Email: mbadaoui@ipn.mx

David Sebastián Baltazar
Instituto Politécnico Nacional
Sección de Estudios de Posgrado
e Investigación ESIME Zacatenco
Ciudad de México, México
Email: dsebasti@ipn.mx

Resumen—En este trabajo se aborda un modelo de flujos óptimos de potencia en sistemas de corriente alterna basado en una formulación de programación cónica de segundo orden. Esta técnica de relajación ofrece ventajas significativas, ya que garantiza un óptimo global, debido a la convexidad del problema y facilita la integración de las ecuaciones de flujo de potencia en el área de la optimización de sistemas de potencia. Se emplea el método del punto interior para resolver problemas de programación cónica. Se evalúan cuatro sistemas de prueba y se comparan los resultados con softwares alternativos: PSSE y MATPOWER. Además, los resultados que se obtienen muestran que el modelo de programación cónica de segundo orden presenta un óptimo de mejor calidad y menor valor en la función objetivo a medida que aumenta el número de nodos en el sistema.

Abstract—This paper deals with a model of optimal power flows in alternating current systems based on a second-order conic programming formulation. This relaxation technique offers significant advantages since it guarantees a global optimum due to the convexity of the problem and facilitates the integration of the power flow equations in the framework of power system optimization. The interior point method is employed to solve conic programming problems. Four test systems are evaluated and the results are compared with alternative software: PSSE and MATPOWER. Furthermore, the results obtained show that the second-order conic programming model presents a better quality optimum and lower value in the objective function as the number of nodes in the system increases.

Palabras clave—Programación cónica de segundo orden, Flujos óptimos de potencia, Relajación convexa, sistemas eléctricos de potencia.

I. INTRODUCCIÓN

La solución del problema de Flujos de Potencia Óptimos (OPF) constituye una herramienta esencial en la gestión y despacho de sistemas eléctricos. Su objetivo es optimizar funciones como las pérdidas de potencia y los costos de generación, todo ello sujeto a las leyes de Kirchhoff, el balance de potencia, restricciones de capacidad y seguridad en los límites de voltaje. Sin embargo, desde la primera formulación en [1], las técnicas OPF convencionales, basadas en formulaciones estándar de flujo de potencia, se enfrentan a limitaciones debido a la no convexidad. Esto se ve reflejado en una complejidad numérica a la hora de implementar los solucionadores. Para abordar estos desafíos, diversos autores han propuesto la Programación Cónica de Segundo Orden

(SOCP) como una formulación que garantiza la obtención de una solución óptima [2], [3]. Al integrar SOCP en el proceso, se logra mitigar los retos planteados por los modelos OPF no convexos [4], [5]. Esto se logra mediante un modelo basado en una relajación convexa compacta con restricciones cuadráticas, lo que reduce eficazmente la complejidad computacional [6]. El presente trabajo se organiza de la siguiente manera: la Sección II-A aborda la formulación tradicional del problema, la Sección III presenta la formulación OPF equivalente basada en SOCP y su respectivo modelo, la Sección IV realiza una comparación entre los resultados obtenidos y, finalmente, en la Sección V, se presentan las conclusiones derivadas de esta investigación.

II. MODELADO MATEMÁTICO DE OPF

El modelo tradicional de OPF es fundamental en el análisis de sistemas eléctricos de potencia. Su solución enfrenta dos desafíos principales. El primero está relacionado con su naturaleza operativa, que requiere resolverse en tiempos muy cortos, limitando los recursos computacionales. El segundo desafío es su naturaleza no convexa además de ser un problema de gran escala, con múltiples nodos, generadores y cargas, lo que aumenta la complejidad del proceso de solución.

II-A. Flujos de potencia de una línea de transmisión

Se considera el modelo de una línea de transmisión como se muestra en la Figura 1, donde se tiene el modelo Pi de una línea de transmisión que considera una capacitancia en derivación. Se define V_i y V_j como las magnitudes de voltaje

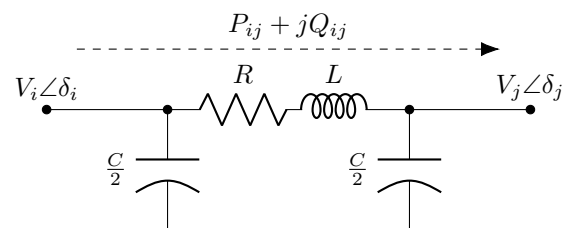


Figura 1. Modelo Pi de una línea de transmisión

en los nodos i y j , respectivamente, y δ_i y δ_j como los ángulos

ARTÍCULO NO. ELE001

ARTÍCULO ACEPTADO POR REFEREO

de fase correspondientes. La línea de transmisión se modela con los parámetros R , L y C , que representan a la resistencia, inductancia y capacitancia distribuidas, respectivamente. La admitancia compleja de la línea se expresa como $Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$, donde G_{ij} es la conductancia y B_{ij} es la susceptancia. La corriente entre nodos se calcula como $I_{ij} = Y_{ij}(V_i - V_j)$. A partir de esta relación, la potencia compleja inyectada en la línea desde el nodo i se expresa como $S_{ij} = V_i I_{ij}^*$. Sustituyendo la expresión de la corriente, se obtiene: $S_{ij} = V_i [Y_{ij}(V_i - V_j)]^*$ y expandiendo y distribuyendo los términos: $S_{ij} = V_i [G_{ij}V_i - G_{ij}V_j - jB_{ij}V_i + jB_{ij}V_j]$. Se separa la parte real $\Re(S_{ij}) = P_{ij}$ y la imaginaria $\Im(S_{ij}) = Q_{ij}$, y aplicando la identidad trigonométrica $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$, se obtiene las ecuaciones:

$$P_{ij} = G_{ij}V_i^2 - G_{ij}V_iV_j \cos(\delta_{ij}) + B_{ij}V_iV_j \sin(\delta_{ij}) \quad (1)$$

$$Q_{ij} = B_{ij}V_i^2 - B_{ij}V_iV_j \cos(\delta_{ij}) - G_{ij}V_iV_j \sin(\delta_{ij}) \quad (2)$$

Donde $V_{ij} = V_iV_j$ y $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$. Estas ecuaciones describen la transferencia de potencia activa y reactiva entre los nodos i y j en función de los parámetros de la línea y las variables del sistema eléctrico. La ecuación de los flujos se pueden representar en forma matricial, ya que pueden existir múltiples líneas conectadas al nodo i , como se muestra en la Figura 2, y todas las líneas conectadas a dicho nodo pertenecen al conjunto $k(i)$.

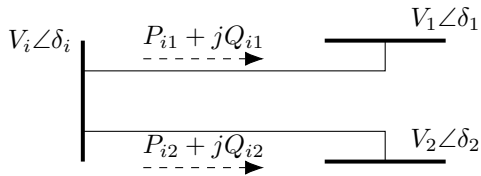


Figura 2. Representación de los flujos en dos líneas de transmisión

Por lo tanto, las ecuaciones (1) y (2) quedan como:

$$P_i(V, \delta) = G_{ij}V_i^2 - \sum_{j \in k(i)} (G_{ij}V_iV_j \cos(\delta_{ij}) + B_{ij}V_iV_j \sin(\delta_{ij})) \quad (3)$$

$$Q_i(V, \delta) = B_{ij}V_i^2 - \sum_{j \in k(i)} (B_{ij}V_iV_j \cos(\delta_{ij}) - G_{ij}V_iV_j \sin(\delta_{ij})) \quad (4)$$

II-B. Formulación clásica de un estudio de flujos de potencia óptimos

Todos los problemas de optimización se pueden caracterizar mediante dos componentes principales: la función objetivo y las restricciones. Estas últimas pueden incluir restricciones de igualdad o desigualdad. Por lo tanto, el problema de *OPF* con una formulación tradicional no lineal no convexa, para un

sistema con \mathcal{N} número de nodos es:

$$\text{mín} \quad \sum_{i \in \mathcal{N}} (a_i(P_i^g)^2 + b_i(P_i^g) + c_i) \quad (5)$$

$$\text{s.a} \quad P_i(V, \delta) = P_i^g - P_i^L \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (6)$$

$$Q_i(V, \delta) = Q_i^g - Q_i^L \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (7)$$

$$P_i^{gmin} \leq P_i^g \leq P_i^{gmax} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (8)$$

$$Q_i^{gmin} \leq Q_i^g \leq Q_i^{gmax} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (9)$$

$$V_i^{min} \leq V_i \leq V_i^{max} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (10)$$

$$\delta_i^{min} \leq \delta_i \leq \delta_i^{max} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (11)$$

III. RELAJACIÓN CONVEXA EN LOS *OPF*

Debido a la no linealidad y no convexidad que existen en las ecuaciones (6) y (7), que introducen las ecuaciones (3) y (4) que es el balance de potencia activa y reactiva respectivamente, se introducen las nuevas variables:

$$c_{ii} = V_i^2 \quad (12)$$

$$c_{ij} = V_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) \quad (13)$$

$$s_{ij} = V_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \quad (14)$$

Donde, estas nuevas variables, deben de satisfacer la siguiente relación:

$$c_{ij}^2 + s_{ij}^2 = c_{ii}c_{jj} \quad (15)$$

Se sustituye en las ecuaciones (3) y (4), por lo tanto, las ecuaciones de los flujos en las líneas quedan como se muestra en las ecuaciones (16) y (17).

$$P_i(c, s) = G_{ij}c_{ii} - \sum_{j \in k(i)} (G_{ij}c_{ij} + B_{ij}s_{ij}) \quad (16)$$

$$Q_i(c, s) = B_{ij}c_{ii} - \sum_{j \in k(i)} (B_{ij}c_{ij} - G_{ij}s_{ij}) \quad (17)$$

Con este cambio de variables, se puede tener una forma alternativa del modelo de *OPF*, en el cuál la restricción de los límites en los ángulos es sustituida por las ecuaciones (24) a (26) [7].

$$\text{mín} \quad \sum_{i \in \mathcal{N}} (a_i(P_i^g)^2 + b_i(P_i^g) + c_i) \quad (18)$$

$$\text{s.a} \quad P_i(c, s) = P_i^g - P_i^L \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (19)$$

$$Q_i(c, s) = Q_i^g - Q_i^L \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (20)$$

$$P_i^{gmin} \leq P_i^g \leq P_i^{gmax} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (21)$$

$$Q_i^{gmin} \leq Q_i^g \leq Q_i^{gmax} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (22)$$

$$(V_i^{min})^2 \leq c_{ii} \leq (V_i^{max})^2 \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (23)$$

$$c_{ij} = c_{ji} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{N} \quad (24)$$

$$s_{ij} = -s_{ji} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{N} \quad (25)$$

$$c_{ij}^2 + s_{ij}^2 = c_{ii}c_{jj} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{N} \quad (26)$$

Sin embargo, este modelo el cuál contiene la suma de dos variables cuadráticas c_{ij}^2 y s_{ij}^2 , como se muestra en la

ARTÍCULO NO. ELE001

ARTÍCULO ACEPTADO POR REFEREO

ecuación (26), está no es una restricción convexa [8]. La ecuación (26) se relaja como sigue:

$$c_{ij}^2 + s_{ij}^2 = c_{ii}c_{jj} \rightarrow c_{ij}^2 + s_{ij}^2 \leq c_{ii}c_{jj} \quad (27)$$

En consecuencia, el modelo matemático de los OPF se transforma en un modelo *SOCP* en conjunto con las Ecuaciones (24) y (25) [6]. Ya que al usar una desigualdad, no se impone una restricción tan estricta al algoritmo, entonces esto garantiza la existencia de un óptimo, este cambio hace que el modelo tome la característica de ser un modelo *SOCP* [9].

IV. RESULTADOS

Se utilizó el lenguaje de programación “Julia” con la paquetería JuMP. El modelo se probó con 4 sistemas del repositorio de “Electric grid test repository” [10] y de los casos de MATPOWER [11], un sistema de 14, 30, 39 y 118 nodos. El sistema de 14 nodos (Figura 3) del IEEE, basado en la red

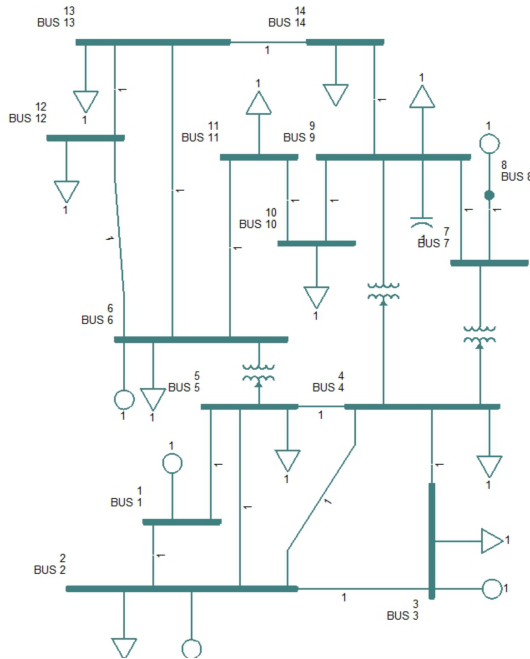


Figura 3. Sistema de pruebas de 14 nodos [10].

eléctrica de 1962 [10], permite un análisis comparativo de las variables P^g en [MW], Q^g en [Mvar], $V_i \angle \delta_i$ en [pu] y la función objetivo. Cuenta con 14 nodos, 5 generadores y 11 cargas. La Tabla I muestra el tipo de nodo (carga, generación o compensación), la demanda activa y reactiva, y los límites de voltaje.

La Tabla II presenta los límites de generación y los coeficientes a, b, c de la función cuadrática operativa utilizada en la función objetivo. Respecto al $Coeff_c$ todos sus valores son 0.

La Tabla III resume la información de las líneas del sistema. Las dos primeras columnas indican los nodos de conexión, mientras que las siguientes tres presentan los valores de resistencia, reactancia y capacitancia. Si el enlace es un

Tabla I
DATOS DEL SISTEMA DE 14 NODOS.

Nodo	tipo	P^L	Q^L	V^{max}	V^{min}
1	3	0	0	1.06	0.94
2	2	21.7	12.7	1.06	0.94
3	2	94.2	19	1.06	0.94
4	1	47.8	-3.9	1.06	0.94
5	1	7.6	1.6	1.06	0.94
6	2	11.2	7.5	1.06	0.94
7	1	0	0	1.06	0.94
8	2	0	0	1.06	0.94
9	1	29.5	16.6	1.06	0.94
10	1	9	5.8	1.06	0.94
11	1	3.5	1.8	1.06	0.94
12	1	6.1	1.6	1.06	0.94
13	1	13.5	5.8	1.06	0.94
14	1	14.9	5	1.06	0.94

Tabla II
DATOS DE LOS GENERADORES EN EL SISTEMA DE 14 NODOS.

Nodo	P^{max}	P^{min}	Q^{max}	Q^{min}	$Coeff_a$	$Coeff_b$
1	332.4	0	10	0	0.04	20
2	140	0	50	-40	0.25	20
3	100	0	40	0	0.01	40
6	100	0	24	-6	0.01	40
8	100	0	24	-6	0.01	40

transformador, la quinta columna muestra el valor del tap; en líneas de transmisión, este es 1.

Tabla III
DATOS DE LAS LÍNEAS EN EL SISTEMA DE 14 NODOS EN pu.

de nodo i	a nodo j	r	x	b	tap
1	2	0.01938	0.05917	0.0528	1
1	5	0.05403	0.22304	0.0492	1
2	3	0.04699	0.19797	0.0438	1
2	4	0.05811	0.17632	0.034	1
2	5	0.05695	0.17388	0.0346	1
3	4	0.06701	0.17103	0.0128	1
4	5	0.01335	0.04211	0	1
4	7	0	0.20912	0	0.978
4	9	0	0.55618	0	0.969
5	6	0	0.25202	0	0.932
6	11	0.09498	0.1989	0	1
6	12	0.12291	0.25581	0	1
6	13	0.06615	0.13027	0	1
7	8	0	0.17615	0	1
7	9	0	0.11001	0	1
9	10	0.03181	0.0845	0	1
9	14	0.12711	0.27038	0	1
10	11	0.08205	0.19207	0	1
12	13	0.22092	0.19988	0	1
13	14	0.17093	0.34802	0	1

El sistema de 14 nodos (Figura 3) se resuelve con *PSSE*, *MATPOWER* y el modelo *SOCP*. La Tabla IV muestra los valores de la función objetivo en dólares.

El modelo *SOCP* reduce la función objetivo en 0.07% respecto a *PSSE*, al encontrar una solución convexa de mejor

Tabla IV

VALOR DE FUNCIÓN OBJETIVO DEL SISTEMA DE 14 NODOS EN DOLARES.

PSSE	MATPOWER	SOCP
8081.19	8081.53	8075.76

calidad [8]. Los voltajes y ángulos obtenidos con *PSSE*, *MATPOWER* y *SOCP* se presentan en las Tablas V y VI.

Tabla V

VOLTAJES EN LOS DIFERENTES NODOS DEL SISTEMA DE 14 NODOS EN *pu*.

Nodo	PSSE	MatPower	SOCP
1	1.0600	1.0599	1.0599
2	1.0443	1.0407	1.0476
3	1.0188	1.0156	1.0202
4	1.0166	1.0144	1.0148
5	1.0182	1.0163	1.0173
6	1.0600	1.0599	1.0599
7	1.0473	1.0463	1.0449
8	1.0600	1.0599	1.0548
9	1.0446	1.0436	1.0582
10	1.0399	1.0391	1.0599
11	1.0464	1.0460	1.0599
12	1.0449	1.0448	1.0574
13	1.0401	1.0399	1.0568
14	1.0245	1.0238	1.0543

Tabla VI

ÁNGULOS EN LOS DIFERENTES NODOS DEL SISTEMA DE 14 NODOS.

Nodo	PSSE	MatPower	SOCP
1	0	0	0
2	-4.0737	-4.0223	-3.8525
3	-9.9465	-9.9259	-10.3927
4	-8.6688	-8.6648	-9.5835
5	-7.4312	-7.4284	-8.3335
6	-12.6738	-12.6892	-13.6077
7	-11.1841	-11.1878	-12.1564
8	-10.4049	-10.4148	-11.3156
9	-12.9946	-12.9971	-14.0105
10	-13.2238	-13.2329	-14.3477
11	-13.0806	-13.0909	-14.0112
12	-13.5160	-13.5327	-14.6870
13	-13.5676	-13.5825	-14.8810
14	-14.2666	-14.2741	-15.8523

Las Tablas VII y VIII presentan la generación activa y reactiva en los cinco generadores. Las potencias activas son similares a los obtenidos con *PSSE* y *MATPOWER*, con ligeras diferencias en los generadores de los nodos 3 y 8. En la generación reactiva, *SOCP* muestra una distribución distinta, predominando valores negativos.

La Tabla IX presenta los valores de la función objetivo en dólares por hora para los distintos sistemas analizados con *PSSE*, *MATPOWER* y el modelo *SOCP*. Se observa una diferencia significativa entre los valores reportados, destacando que el modelo *SOCP* siempre obtiene un menor costo, con una reducción más pronunciada a medida que aumenta el

Tabla VII

GENERACIÓN DE POTENCIA EN LOS DIFERENTES NODOS EN [*MW*].

Nodo	PSSE	MatPower	SOCP
1	1.9439	1.9433	1.9493
2	0.3673	0.3671	0.3679
3	0.2861	0.2874	0.2729
6	0	3.1E-06	3.1E-08
8	0.0855	0.0849	0.0918

Tabla VIII

GENERACIÓN DE POTENCIA REACTIVA EN LOS DIFERENTES NODOS EN [*Mvar*].

Nodo	PSSE	MatPower	SOCP
1	-0.0718	8.3E-06	2.85E-07
2	0.3211	0.23685	-0.342232
3	0.245	0.24126	0.088132
6	0.1036	0.11545	-0.023703
8	0.0768	0.08272	-0.059999

número de nodos. Asimismo, la Tabla X muestra los tiempos de cómputo en segundos para cada sistema.

Tabla IX

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO EN DÓLARES [*\$*]

Sistema	PSSE	MATPOWER	SOCP
Case14	8081.19	8081.53	8075.76
Case30	8905.88	8906.14	8899.56
Case39	41857.90	41864.18	41278.42
Case118	130167.34	129660.70	129530.31

Tabla X

TIEMPO DE COMPUTO EN SEGUNDOS [*seg*]

Sistema	PSSE	MATPOWER	SOCP
Case14	0.0664062	0.47	0.069149
Case30	0.0117188	0.43	0.171833
Case39	0.0820312	0.55	0.202186
Case118	0.185547	0.49	2.430055

La Tabla XI presenta la diferencia porcentual entre los valores de la Tabla IX. Esto permite evaluar cuánto ha mejorado la función objetivo calculada con el modelo *SOCP* en comparación con los otros enfoques. Se observa que, en todos los casos, el modelo *SOCP* obtiene un menor valor de función objetivo, con una reducción más significativa en sistemas más grandes, como el caso de 39 nodos.

V. CONCLUSIONES

La implementación del modelo *OPF* con relajación convexa, basada en *SOCP* con las variables cónicas c_{ij} e s_{ij} , demuestra ser una alternativa viable para reducir la complejidad numérica en comparación con el modelo estándar de *OPF*. Se logró encontrar un punto operativo óptimo. Las Tablas IX a XI presentan información detallada sobre la variación de los valores de la función objetivo y los tiempos de cómputo en

Tabla XI

PORCENTAJE DE DIFERENCIA ENTRE LOS RESULTADOS DE PSSE,
 MATPOWER Y *SOCP*.

Sistema	PSSE	MATPOWER	<i>SOCP</i>
Case14	0.00 %	0.00 %	-0.07 %
Case30	0.00 %	0.00 %	-0.07 %
Case39	0.00 %	0.02 %	-1.38 %
Case118	0.00 %	-0.39 %	-0.49 %

función del sistema analizado y la metodología utilizada. Estas diferencias son clave para evaluar el rendimiento y la eficiencia de cada enfoque en diferentes contextos de estudio de sistemas eléctricos. Los resultados evidencian que el modelo *SOCP* propuesto mejora el valor de la función objetivo en todos los casos de estudio. Aunque su tiempo de cómputo es mayor en comparación con la metodología basada en condiciones KKT utilizada por *PSSE* y la función *fmin* de *MATPOWER*, su capacidad para calcular un óptimo global se traduce en un menor costo operativo en los sistemas analizados.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Instituto Politécnico Nacional (IPN), a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) y a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI) por el apoyo brindado para el desarrollo de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] J. Carpentier, "Contribution to the economic dispatch problem," *Bulletin de la Societe Francoise des Electriciens*, vol. 3, no. 8, pp. 431–447, 1962.
- [2] R. Jabr, "Radial distribution load flow using conic programming," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 21, no. 3, pp. 1458–1459, 2006.
- [3] A. Lambert, "A tight compact quadratically constrained convex relaxation of the Optimal Power Flow problem," *Computers and Operations Research*, vol. 166, 2024, cited by: 0; All Open Access, Hybrid Gold Open Access.
- [4] Z. Wang, J. Zhong, D. Chen, Y. Lu, and K. Men, "A multi-period optimal power flow model including battery energy storage," in *2013 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, 2013, pp. 1–5.
- [5] Z. Yuan and M. R. Hesamzadeh, "Second-order cone AC optimal power flow: convex relaxations and feasible solutions," *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, vol. 7, no. 2, pp. 268–280, 03 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s40565-018-0456-7>
- [6] X. Zhang, H. Woo, and S. Choi, "An interval power flow method for radial distribution systems based on hybrid second-order cone and linear programming," *Sustainable Energy, Grids and Networks*, vol. 36, p. 101158, 2023. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352467723001662>
- [7] S. H. Low, "Convex Relaxation of Optimal Power Flow—Part I: Formulations and Equivalence," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 1, no. 1, pp. 15–27, 2014.
- [8] —, "Convex Relaxation of Optimal Power Flow—Part II: Exactness," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 1, no. 2, pp. 177–189, 2014.
- [9] R. Y. Zhang, C. Jozs, and S. Sojoudi, "Conic Optimization Theory: Convexification Techniques and Numerical Algorithms," in *2018 Annual American Control Conference (ACC)*, 2018, pp. 798–815.
- [10] "Electric Grid Test Cases," <https://electricgrids.engr.tamu.edu/electric-grid-test-cases/>.
- [11] R. D. Zimmerman, C. E. Murillo-Sánchez, and R. J. Thomas, "MATPOWER: Steady-State Operations, Planning, and Analysis Tools for Power Systems Research and Education," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 26, no. 1, pp. 12–19, 2011.