

Flujos óptimos de potencia en corriente alterna utilizando AMPL

Octavio López Hernández, David Romero Romero, Mohamed Badaoui

Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Unidad Profesional Adolfo López Mateos “Zacatenco”
olopezh1301@alumno.ipn.mx, dromero@ipn.mx, mbadaoui@ipn.mx

Resumen— En este trabajo se describe la formulación que será programada en el software AMPL (A Mathematical Programming Language), utilizando el solucionador Knitro que emplea el algoritmo de punto interior para resolver un sistema de ecuaciones no lineales asociado a la formulación de flujos óptimos de potencia en corriente alterna. Además, se programa la obtención de la matriz de admitancias, necesaria del sistema de prueba de 5 nodos.

Palabras Clave — AMPL, Corriente alterna, Flujos de potencia, No convexo, Optimización.

I. INTRODUCCIÓN

El problema del flujo de potencia es un problema conocido ampliamente en el área de Sistemas Eléctricos de Potencia. El objetivo es determinar las magnitudes y ángulos de voltaje en un conjunto de nodos, partiendo del conocimiento previo de las magnitudes de voltaje y los niveles de potencia en otro conjunto de nodos, y que se dispone de un modelo de la configuración de la red [1,2,3].

Un programa de flujo de potencia es un código computacional que implementa dicho procedimiento. La solución del flujo de potencia contiene las tensiones y ángulos en todos los nodos, a partir de los cuales es posible calcular los niveles de generación y carga de potencia real y reactiva en todos los nodos, así como los flujos de potencia real y reactiva a través de todos los circuitos [1,2,3].

El problema del flujo de potencia surgió originalmente en entornos de planificación, donde los ingenieros evaluaban diferentes configuraciones de red necesarias para atender una carga futura esperada. Posteriormente, se convirtió en un problema operativo, ya que los operadores e ingenieros de operación debían monitorear el estado en tiempo real de la red en términos de magnitudes de voltaje y flujos en los circuitos. En la actualidad, el problema del flujo de potencia es ampliamente reconocido como un problema fundamental en el análisis de sistemas de potencia, y existen numerosos programas comerciales avanzados para resolverlo. La mayoría de estos programas son capaces de resolver el problema para decenas de miles de nodos interconectados. Para una formulación analítica adecuada, es apropiado categorizar los nodos de acuerdo con la información que se conoce sobre ellos antes de resolver el problema del flujo de potencia. Para cada bus existen cuatro variables posibles que caracterizan su

condición eléctrica. Consideremos un bus arbitrario, numerado como k . Las cuatro variables son la inyección de potencia real y reactiva, P_k y Q_k , respectivamente, y la magnitud y el ángulo del voltaje, $|V_k|$ y θ_k , respectivamente. Desde esta perspectiva, existen tres tipos básicos de nodos [4,5,6].

- Nodos PV: Se conoce P_k y $|V_k|$ pero no se conoce Q_k ni θ_k . Estos nodos se agrupan en la categoría de nodos de control de voltaje, debido a la capacidad de especificar y, por lo tanto, conocer la magnitud del voltaje en ese nodo. También existen casos especiales en los que un nodo que no es generador (es decir, un nodo con carga o un nodo sin generación ni carga) puede clasificarse como de tipo PV; algunos ejemplos de estos casos especiales son nodos que cuentan con capacitores en derivación conmutados o sistemas estáticos de VAR (SVCs). No se abordan estos casos especiales en este trabajo. Las inyecciones de potencia real en los nodos de tipo PV se eligen de acuerdo con el despacho del sistema correspondiente a las condiciones de carga modeladas
- Nodos PQ: Se conoce P_k y Q_k pero no se conoce $|V_k|$ ni θ_k . Todos los nodos de carga entran en esta categoría, incluidos aquellos nodos que no tienen ni carga ni generación. Las inyecciones de potencia real de los nodos de tipo PQ se determinan según las condiciones de carga modeladas. Las inyecciones de potencia reactiva se eligen de acuerdo con el factor de potencia esperado de la carga.

El tercer tipo de nodo se conoce como nodo oscilante. Otros dos términos comunes son: nodo slack y nodo de referencia. Solo existe un nodo oscilante, y el ingeniero puede designar a cualquiera de los nodos generadores del sistema como tal. Para el nodo oscilante se conocen $|V|$ y θ . El hecho de que se conozca θ es la razón por la cual a veces se le llama bus de referencia. Físicamente, no hay nada especial en el nodo oscilante; de hecho, es un artefacto matemático del procedimiento de solución [1-6].

La generación debe suministrar tanto la carga como las pérdidas en los circuitos. Antes de resolver el problema del flujo de potencia, se conocen todas las inyecciones en los buses PQ,

pero no se sabe cuáles serán las pérdidas, ya que éstas dependen de los flujos en los circuitos que aún deben calcularse. El generador para el cual no se fija la inyección de potencia real es el que se modela en el nodo oscilante. Así, este generador "oscilante" compensa las pérdidas de la red, o, dicho de otro modo, "cubre el déficit". La magnitud del voltaje del bus oscilante se selecciona de modo que corresponda al ajuste típico de voltaje de este generador. El ángulo del voltaje puede asignarse a cualquier valor, pero normalmente se designa como 0° .

II. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

En esta sección se muestra la representación compacta del comportamiento del sistema de potencia en términos de la inyección de potencia activa y reactiva en cada nodo al evaluar las partes real e imaginaria de la matriz de admitancias. El par resultante de ecuaciones puede escribirse en varias formas equivalentes, dependiendo de si los voltajes y los elementos de la matriz de admitancia se expresan en coordenadas polares o rectangulares [7-13].

A. Flujos de potencia en corriente alterna

En la literatura, las formas más comunes de las ecuaciones de flujo de potencia en corriente alterna son:

1. Selección de coordenadas polares para el voltaje $V_i \angle \theta_i$ y coordenadas rectangulares para la admitancia $Y_{ik} = G_{ik} + j B_{ik}$.

$$P_i(V, \theta) = \sum_{k=1}^N |G_{ik} V_i V_k| \cos(\theta_i - \theta_k) + B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) \quad \forall i \in N \quad (1)$$

$$Q_i(V, \theta) = \sum_{k=1}^N |G_{ik} V_i V_k| \sin(\theta_i - \theta_k) - B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) \quad \forall i \in N \quad (2)$$

2. Selección de coordenadas polares para el voltaje $V_i \angle \delta_i$ y coordenadas polares para la admitancia $Y_{ik} = Y_{ik} \angle \theta_{ik}$

$$P_i(V, \delta) = \sum_{k=1}^N |Y_{ik} V_i V_k| \cos(\theta_i - \theta_k - \delta_i) \quad (3)$$

$$Q_i(V, \delta) = \sum_{k=1}^N |Y_{ik} V_i V_k| \sin(\theta_i - \theta_k - \delta_i) \quad (4)$$

Donde

Y_{in} es la magnitud de la admitancia de la línea que forma la conexión entre el nodo i y el nodo k .

V_i y V_k es la magnitud de la tensión del nodo i y el nodo k .

θ_{ik} es el ángulo de la admitancia propia de la línea que forma la conexión entre el nodo i y el nodo k .

G_{ik} es la conductancia de la línea entre el nodo i y k .

B_{ik} es la susceptancia de la línea entre el nodo i y k .

P_i^G potencia generación.

C_i función de costos de los generadores.

Q_i flujo de potencia reactiva.

P_i^L es la potencia activa de las pérdidas.

Q_i^L es la potencia reactiva de las pérdidas.

$Q_i^{G \min}$ potencia reactiva mínima de generación.

$Q_i^{G \max}$ potencia reactiva máxima de generación.

V_i^{\min} voltaje mínimo.

V_i^{\max} voltaje máximo.

δ_i ángulo del voltaje.

δ_i^{\min} ángulo mínimo.

δ_i^{\max} ángulo máximo.

B. Flujos óptimos de potencia en corriente alterna

La optimización consiste en agregar una función objetivo con las ecuaciones de flujo de potencia (1) y (2) para definir un problema de optimización. Lo que hace diferente frente a otras clases de problemas en sistemas de potencia, como el despacho económico, la asignación de unidades [11,12].

La mayoría de las variantes se basan en la formulación clásica propuesta por Carpentier en 1962 y posteriormente por Dommel y Tinney en 1968. Esta formulación es una extensión del despacho económico clásico, cuyo objetivo principal es minimizar el costo total de generación eléctrica, asegurando al mismo tiempo que el sistema opere dentro de límites seguros y estables [5,11,12].

En este modelo, el sistema de potencia se representa mediante un conjunto de nodos conectados a través de un conjunto de líneas, con generadores controlables ubicados en un subconjunto de los nodos del sistema. El costo operativo de cada generador se describe mediante una función generalmente cuadrática en función de su potencia activa de salida. El objetivo final es minimizar el costo total de generación eléctrica [11,12]. La formulación clásica de este problema es:

$$\min_{P_i^G} \sum_{i \in N} C_i(P_i^G) \quad (5)$$

$$s.t. P_i(V, \delta) = P_i^G - P_i^L \quad \forall i \in N \quad (6)$$

$$Q_i(V, \delta) = Q_i^G - Q_i^L \quad \forall i \in N \quad (7)$$

$$P_i^{G \min} \leq P_i^G \leq P_i^{G \max} \quad \forall i \in G \quad (8)$$

$$Q_i^{G \min} \leq Q_i^G \leq Q_i^{G \max} \quad \forall i \in G \quad (9)$$

$$V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max} \quad \forall i \in N \quad (10)$$

$$\delta_i^{\min} \leq \delta_i \leq \delta_i^{\max} \quad \forall i \in N \quad (11)$$

III. SISTEMA DE PRUEBA

En esta sección se muestra el sistema de prueba en la **Figura 1**, mientras que sus parámetros de la red corresponden a la **Tabla**

1 y **Tabla 2**, la formulación programada en el software es de manera general en donde se incluyen los Taps de los transformadores, el símbolo (.) indica sin valor [11].

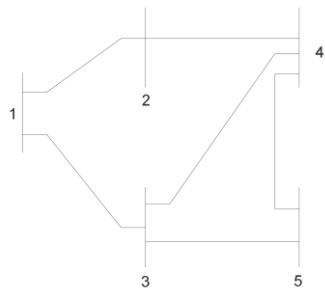


Figura 1.- Sistema de prueba [11]

Tabla 1.- Parámetros de líneas del sistema de prueba.

De	A	R	X	B ^{sh}	T	φ
i	k	ik	ik	ik	Ik	ik
1	2	0.000	0.300	0.000	1	.
1	3	0.023	0.145	0.040	1	.
2	4	0.006	0.032	0.010	1	.
3	4	0.020	0.260	0.000	1	-3.0°
3	5	0.000	0.320	0.000	0.98	.
4	5	0.000	0.500	0.000	1	.

Tabla 2.- Parámetros de la red.

Nodo	PD	QD	V ^{min}	V ^{max}
i	i	i	i	i
1	.	.	1.00	1.0
2	.	.	0.95	1.05
3	.	.	0.95	1.05
4	0.900	0.400	0.95	1.05
5	0.239	0.129	0.95	1.05

Tabla 3.- Parámetros de los generadores.

Nodo	pG _{min}	pG _{max}	QG _{min}	QG _{max}
i	i	i	i	i
1	-inf.	inf.	-inf.	inf.
3	0.10	0.40	-0.20	0.30
4	0.05	0.40	-0.20	0.20

Los parámetros de los generadores se indican en la **Tabla 3**, la función de costos de los generadores se representan de la siguiente forma:

$$C1 (P1^G) = 0.35P1^G \quad (12)$$

$$C3 (P3^G) = 0.20P3^G + 0.40 (P3^G)^2 \quad (13)$$

$$C4 (P4^G) = 0.30P4^G + 0.50 (P4^G)^2 \quad (14)$$

En la **Figura 1** se muestra de manera general la forma en que se programan los conjuntos, parámetros y variables del modelo de optimización.

```

set BUSES; # Conjunto de nodos
set LINES within (BUSES, BUSES); # Conjunto de líneas
set GENBUS within BUSES; # Conjunto de nodos con generación
param lload (BUSES) default 0; # Carga de potencia real
param Qload (BUSES) default 0; # Carga de potencia reactiva
param Vmin (BUSES) default 0; # Voltaje mínimo
param Vmax (BUSES) default 0; # Voltaje máximo
param Gmin (GENBUS) default 0; # Generación mínima (potencia real)
param Gmax (GENBUS) default 0; # Generación máxima (potencia real)
param QGmin (GENBUS) default 0; # Generación mínima (potencia reactiva)
param QGmax (GENBUS) default 0; # Generación máxima (potencia reactiva)
param alpha (GENBUS) default 0; # Coeficiente de costo a
param beta (GENBUS) default 0; # Coeficiente de costo b
param gamma (GENBUS) default 0; # Coeficiente de costo c
*****
param theta ik (BUSES, BUSES);
param Y_map (BUSES, BUSES);
#-----Matriz de Admitancia parte real coordenada rectangular
param Ylin_re (BUSES, BUSES);
#-----Matriz de Admitancia parte imaginaria coordenada rectangular
param Ylin_im (BUSES, BUSES);
*****
var PG (GENBUS); # Generación de potencia real
var QG (GENBUS); # Generación de potencia reactiva
var V (BUSES); # Magnitud del voltaje
var theta (BUSES); # Ángulo del voltaje, en grados
var Pflow_AC (LINES); # Potencia activa obtenida de las ecuaciones de flujos en las líneas
var Qflow_AC (LINES); # Potencia reactiva obtenida de las ecuaciones de flujos en las líneas.
*****

```

Figura 1.- Declaración de conjuntos y parámetros del modelo.

En la **Figura 2** se muestra el modelo de minimizar el costo de combustible de los generadores, utilizando en las restricciones las ecuaciones de flujos de potencia en corriente alterna.

```

minimize Total_Cost: #Función Objetivo
sum (i in GENBUS) (alpha[i] * PG[i]^2 + beta[i] * PG[i] + gamma[i]);
*****
s.t. Real_Power_Balance (i in BUSES): #Restricción de balance de potencia
V[i] * sum (k in BUSES) V[k] * Y_mag[i,k] * cos(theta[i] - theta[k] - theta_ik[i,k]) =
sum (g in GENBUS) (if i == g then PG[g] else 0) - lload[i];
*****
s.t. Active_Power_BalanceAS (i,k in LINES): #Ecuación de Flujo de potencia activa MW
Pflow_AC[i,k] = V[i] * sum (j in BUSES) V[j] * Y_mag[i,j] * cos(theta[i] - theta[j] - theta_ik[i,j])
*****
s.t. Reactive_Power_Balance (i in BUSES): #Ecuación de Flujo de potencia reactiva MVAR
sum (g in GENBUS) (if i == g then QG[g] else 0) - Qload[i] =
sum ((i,k) in LINES) Qflow_AC[i,k] - sum ((k,i) in LINES) Qflow_AC[k,i];
*****
s.t. Voltage_Limits (i in BUSES): #Límites de Voltajes
Vmin[i] <= V[i] <= Vmax[i];
*****
s.t. Generation_Limits (i in GENBUS): #Límites de Generación de potencia activa MW
Gmin[i] <= PG[i] <= Gmax[i];
*****
s.t. Reactive_Generation_Limits (i in GENBUS): #Límites de Generación de potencia reactiva MVAR
QGmin[i] <= QG[i] <= QGmax[i];
*****
s.t. Theta_Limits (i in BUSES): #Límites de Ángulos
-180 <= Theta[i] <= 180;

```

Figura 2.- Modelo matemático: Función objetivo y restricciones.

```

*****
let (i,j) in LINES: T(i,j) := if T(i,j) == 0 then 1 else T(i,j);
*****
let (i,j) in LINES: phi(i,j) := (3.1416/180) * phi(i,j);
*****
let (i,j) in LINES: phiMin(i,j) := (3.1416/180) * phiMin(i,j);
let (i,j) in LINES: phiMax(i,j) := (3.1416/180) * phiMax(i,j);
*****
let (i,j) in LINES: g(i,j) := R(i,j) / (R(i,j)^2 + X(i,j)^2);
let (i,j) in LINES: b(i,j) := (-X(i,j) / (R(i,j)^2 + X(i,j)^2));
*****
let i in BUSES: Gbus(i,i) :=
g(i,i) * # Conductancia shunt del bus i
sum ((k,i) in LINES) T(i,k) * g(i,k); # Líneas que salen de i
sum ((k,i) in LINES) g(k,i); # Líneas que llegan a i
*****
let i in BUSES: Bbus(i,i) :=
b(i,i) * # susceptancia shunt en el bus i
sum ((i,k2) in LINES) T(i,k2) * b(i,k2) + b(i,k2) * b(i,k2) * cos(phi(i,k2))
- sum ((k2,i) in LINES) k2 == k1 T(i,k2) * g(k2,i) * cos(phi(k2,i)) + b(k2,i) * sin(phi(k2,i));
*****
let i in BUSES: Bbus(i,i) :=
sum ((i,k2) in LINES) k2 == k1 T(i,k2) * g(i,k2) * sin(phi(i,k2)) + b(i,k2) * cos(phi(i,k2))
- sum ((k2,i) in LINES) k2 == k1 T(i,k2) * g(k2,i) * sin(phi(k2,i)) + b(k2,i) * cos(phi(k2,i));
*****
let i in BUSES: theta(i,i) :=
if Gbus(i,i) = 0 && Bbus(i,i) = 0 then 0
else atan(Bbus(i,i), Gbus(i,i));
*****
let i in BUSES: j in BUSES: thetaik(i,j) :=
if Gbus(i,j) = 0 && Bbus(i,j) = 0 then 0
else atan(Bbus(i,j), Gbus(i,j));
*****

```

Figura 3.- Formulación para la obtención de la Matriz de admitancias

En la **Figura 3**, se muestra la forma de programar el modelado para la obtención de la matriz de admitancias, se separa la

matriz en la parte real y en la parte imaginaria, en la **Figura 4** se indican los resultados de forma matricial.

```

ampl: display Ybus;
Ybus [*,*]
1      1      2      3      4      5      :=
1  10.0972  3.33333  6.81139  0      0
2  3.33333  33.6958  0      30.7148  0
3  6.81139  0      13.8567  3.83482  3.18878
4  0      30.7148  3.83482  36.4962  2
5  0      0      3.18878  2      5.125

ampl: display Gbus;
Gbus [*,*]
1      1      2      3      4      5      :=
1  1.06709  0      -1.06709  0      0
2  0      5.66038  0      -5.66038  0
3  -1.06709  0      1.4112  -0.093606  0
4  0      -5.66038  -0.493823  8.9545  0
5  0      0      0      0      0

ampl: display Bbus;
Bbus [*,*]
1      1      2      3      4      5      :=
1  -10.0406  3.33333  6.72729  0      0
2  3.33333  -33.217  0      30.1887  0
3  6.72729  0      -13.7847  3.83368  3.18878
4  0      30.1887  3.8029  -36.0072  2
5  0      0      3.18878  2      -5.125
    
```

Figura 4.- Matriz de admitancias parte real e imaginaria.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se muestran los resultados de realizar el programa de flujos óptimos en corriente alterna en el Software AMPL, la obtención de la matriz de admitancia y la solución óptima de la formulación es: 0.4041 P.U el costo total del despacho de los generadores las pérdidas de potencia activa son de 0.0593076 P.U. En la **Tabla 4** se indican los resultados de magnitud de voltajes y sus ángulos respectivamente, mientras que en la **Tabla 5** se indican las potencias de generación tanto activa como reactiva.

Tabla 4.- Magnitud de Voltaje y Ángulos.

Nodo	Voltaje [V]	Ángulo [θ] rad
1	1	0
2	0.982697	-0.130869
3	0.96415	-0.0737066
4	0.096963	-0.14319
5	0.95	-0.150807

Tabla 5.- Magnitud de Potencias de generación.

Nodo	Activa [P.U]	Reactiva [P.U]
1	0.946145	0.248709
3	0.194654	-0.0722127
4	0.057509	-0.2

V. CONCLUSIONES

Durante la elaboración de este trabajo se indica que la programación es general para cualquier tipo de sistema convencional permitiendo que el solucionador Knitro obtenga una solución óptima. La obtención de la matriz de admitancias permite la incorporación de los parámetros más utilizados en el modelado de la red de transmisión de esta forma motiva a realizar trabajos de investigación futuros en la cuestión de

modelar el Tap relación de transformación de los transformadores bajo carga variable, o incluso en trabajos de expansión de la transmisión, y su efecto en la potencia reactiva.

La programación del modelado en AMPL no solo facilita la implementación de nuevos trabajos futuros, sino que también aporta flexibilidad y eficiencia en el desarrollo de los modelos matemáticos. Además de la capacidad de integrar los diferentes solucionadores para la solución de diferentes problemas complejos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Instituto Politécnico Nacional y a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Zacatenco por el apoyo brindado.

REFERENCIAS

- [1] A. J. Wood, B. F. Wollenberg and G. B. Sheble, *Power Generation, Operation and Control*. John Wiley & Sons, 3rd ed., 2013.
- [2] A. J. Conejo and L. Baringo, *Power System Operations*. Power Electronics and Power Systems, Springer International Publishing, 1 ed., 2018.
- [3] J. C. Das, *Load Flow Optimization and Optimal Power Flow*. Volume 2, CRC Press, 1 ed., 2018.
- [4] P. Pedregal, R. Garcia, E.Castillo, A. J.Conejo and N. Alguacil, *Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science*. Pure and Applied Mathematics, Wiley, 1 ed., 2002.
- [5] H. W. Dommel and W. F. Tinney, "Optimal power flow solutions," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-87, no. 10, pp. 1866–1876, 1968.
- [6] A. M. Sasson, F. Vilorio, and F. Aboytes, "Optimal load flow solution using the hessian matrix," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-92, no. 1, pp. 31–41, 1973.
- [7] J. Peschon, D. Bree, and L. Hajdu, "Optimal power-flow solutions for power system planning," *Proceedings of the IEEE*, vol. 60, no. 1, pp. 64–70, 1972.
- [8] J. Momoh, R. Adapa, and M. El-Hawary, "A review of selected optimal power flow literature to 1993. i. nonlinear and quadratic programming approaches," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 14, no. 1, pp. 96–104, 1999.
- [9] G. Torres and V. Quintana, "An interior-point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 13, no. 4, pp. 1211–1218, 1998.
- [10] B.-G. Risi, F. Riganti-Fulginei, and A. Laudani, "Modern techniques for the optimal power flow problem: State of the art," *Energies*, vol. 15, no. 17, 2022
- [11] S. Frank and S. Rebennack, "An introduction to optimal power flow: Theory, formulation, and examples," *IIE Transactions*, vol. 48, no. 12, pp. 1172–1197, 2016.
- [12] H. A. Ruiz Florez, G. P. López, A. Jaramillo-Duque, J. M. López Lezama, and N. Munoz-Galeano, "A mathematical modeling approach for power flow and state estimation analysis in electric power systems through ampl," *Electronics*, vol. 11, no. 21, p. 3566, 2022.
- [13] J. B. Ward and H. W. Hale, "Digital Computer Solution of Power-Flow Problems [includes discussion]," in *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems*, vol. 75, no. 3, pp. 398–404, Jan. 1956.