

# Propagación de ondas acústicas en el océano estratificado con una capa superior de hielo

Alan I. Vazquez Yañez, Vladimir Rabinovitch, Raúl Castillo Pérez

Instituto Politécnico Nacional, Maestría en Telecomunicaciones, ESIME Zacatenco. Av. IPN s/n, Col. Lindavista, CP 07380  
avazquezy1300@alumno.ipn.mx, vrabinovitch@ipn.mx, rcastillo@ipn.mx

**Resumen** — Se presenta una propuesta de solución para la propagación de ondas acústicas en un océano estratificado. El océano se considera compuesto por tres capas de distinta densidad y velocidad del sonido. Una capa es el hielo, otra el agua y finalmente el fondo marino. La propagación de las ondas es modelada matemáticamente por la ecuación de onda. Ésta ha sido resuelta con ayuda del método SPPS y se ha comparado con un método analítico. Así, posteriormente, se calcula el campo acústico debido a una fuente de sonido ubicada a cierta distancia, basado en el cálculo de la pérdida por transmisión.

**Palabras Clave** — ecuación de onda, efecto Doppler, método SPPS, modos normales, pérdida por transmisión.

**Abstract** — A proposed solution for the propagation of acoustic waves in a stratified ocean is presented. The ocean is considered as composed of three layers of different density and speed of sound. One of those layers is ice, another is water and finally the ocean bottom. The wave propagation is mathematically modeled by the wave equation. This has been solved by the SPPS method comparing it with an analytical method. In that way, the acoustic field of a sound source located at a certain distance is calculated based on the transmission loss.

**Keywords** – Doppler effect, normal modes, SPPS method, transmission loss, wave equation.

## I. INTRODUCCIÓN

Para mantener la comunicación humana debajo del agua, o en algunos casos, hacer ciertas investigaciones submarinas, se emplean las ondas acústicas en comparación con las ondas electromagnéticas en este mismo medio. Esta inclinación se ha dado debido a la rápida atenuación que las ondas electromagnéticas sufren en el agua en contraste con el gran alcance que pueden tener las ondas acústicas [1, 2].

Por otro lado, la economía y la investigación son factores que han propiciado un aumento en las actividades humanas en las zonas polares del planeta [3]. Esto ha generado nuevos retos y nuevas condiciones en las que es necesario mantenerse comunicados.

Este tipo de estudios afronta la tarea de solucionar ecuaciones diferenciales de segundo orden en donde se han propuesto hacerlo por medio del método de elemento finito, método WKB, método de diferencias finitas, método de rayos, entre otros. En este trabajo se ha propuesto solucionar esta tarea con el método SPPS [4, 5].

En la acústica, la referencia para conocer los cambios que una onda tiene al propagarse en algún medio es la pérdida por transmisión [6]. En este trabajo se hará el cálculo de este parámetro para analizar el comportamiento que experimenta el campo acústico generado por una fuente en reposo cuando las ondas se propagan a través de un medio estratificado, es decir, un medio con capas que presentan distintas características físicas respectivamente.

Por otro lado, se estudiará el efecto Doppler generado debido a que se asumirá que la fuente se estará desplazando en el medio, es decir, las ondas que el receptor reciba se percibirán con ciertas diferencias en frecuencia y en tiempo con respecto a las emitidas originalmente.

Se considera que el medio estudiado tiene una capa de hielo de grosor  $h$ , una capa de agua de grosor  $(H - h)$  y otra de fondo marino que se considera desde  $H$  en adelante, como se muestra en la figura siguiente.

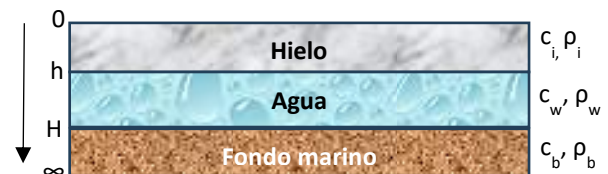


Figura 1. Medio estratificado estudiado en este trabajo.

En la siguiente sección se mostrarán las condiciones físicas impuestas en este problema, así como su descripción matemática. También, se presentará la propuesta matemática que dará solución a las condiciones previas. En la tercera sección se mostrarán algunos resultados gráficos y sus descripciones. En la cuarta sección, se detallarán los resultados a los que se ha llegado hasta este momento de la investigación.

## II. METODOLOGÍA/DESARROLLO

Se presenta la ecuación (1) como la ecuación de onda y como aquella que modela matemáticamente la propagación de las ondas acústicas debajo del agua [7]

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + k^2(\omega, z) - \alpha^2 \right) \psi(\omega, \alpha, z) = 0. \quad (1)$$

Las características físicas de las tres capas que más importan en este estudio son las magnitudes de la velocidad del sonido  $c$  y de la densidad  $\rho$ . Respectivamente, en cada capa serán distintas y dependerán de la profundidad  $z$ . Los subíndices  $i$ ,  $w$  y  $b$ , están relacionados con el término en inglés de cada una de las capas. Así, la capa de hielo tendrá el subíndice  $i$  de ice, la capa de agua tendrá el subíndice  $w$  de water y finalmente  $b$  de bottom.

$$c(z) = \begin{cases} c_i, & 0 < z < h, \\ c_w, & h < z < H, \\ c_b, & z > H, \end{cases} \quad \rho(z) = \begin{cases} \rho_i, & 0 < z < h, \\ \rho_w, & h < z < H, \\ \rho_b, & z > H. \end{cases}$$

El sistema deberá cumplir con ciertas condiciones. La condición (2) señala que la magnitud de la función  $\psi$  deberá ser cero en la superficie del hielo.

$$\psi(\omega, \alpha, 0) = 0, \quad (2)$$

La condición (3) señala que la magnitud y dirección de la onda propagada deberán ser continuas en su paso por la frontera entre la capa de hielo y el agua.

$$\psi(\omega, \alpha, h - 0) = \psi(\omega, \alpha, h + 0), \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho_i} \left( \frac{d}{dz} \psi(\omega, \alpha, h - 0) \right) = \frac{1}{\rho_w} \left( \frac{d}{dz} \psi(\omega, \alpha, h + 0) \right),$$

De manera análoga, la condición (4) señala que la magnitud y dirección de la onda propagada deberán ser continuas en su paso por la frontera entre el agua y el fondo marino.

$$\psi(\omega, \alpha, H - 0) = \psi(\omega, \alpha, H + 0), \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho_w} \left( \frac{d}{dz} \psi(\omega, \alpha, H - 0) \right) = \frac{1}{\rho_b} \left( \frac{d}{dz} \psi(\omega, \alpha, H + 0) \right),$$

Finalmente, la condición (5) señala que la magnitud de la función  $\psi$  será cero cuando la profundidad sea muy grande.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \psi(\omega, \alpha, z) = 0. \quad (5)$$

En las expresiones anteriores  $\omega$  es la frecuencia y  $\alpha$  es la constante de propagación.

Se construyó la ecuación de dispersión. Al resolverla, ésta permite encontrar los modos normales propagados del sistema

$$D(\omega, \alpha) = (\psi_w(\omega, \alpha, H)) - \frac{\rho_b}{\rho_w \sqrt{\alpha^2 - k_b^2(\omega)}} \psi'_w(\omega, \alpha, H) = 0. \quad (6)$$

Es decir, cuando  $D = 0$  para una frecuencia dada, se habrán encontrado los modos propagados (distintas  $\alpha$  que resuelven la ecuación).

#### A. Método SPPS

El método de Series de Potencia de Parámetro Espectral (SPPS) ofrece una propuesta de solución a ecuaciones diferenciales de segundo orden de tipo Sturm-Liouville. En contraste a otros métodos, éste ofrece una solución no sólo numérica sino también analítica, el tiempo de cálculo puede verse reducido, por lo que podría beneficiar en el uso de los recursos computacionales. Este método ya ha sido aplicado en diversos trabajos ofreciendo muy buenas aproximaciones y resultados bastante exactos [7, 8, 9, 10, 11]. Convenientemente, la ecuación de onda se puede considerar de este tipo. Por ello, se utilizará el método SPPS para dar solución a dicha ecuación.

Este método considera que a la ecuación diferencial de tipo Sturm-Liouville se le puede dar solución en forma de una combinación lineal de soluciones

$$\psi_w = c_1 u_1 + c_2 u_2 \quad (7)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias complejas,

$$u_1 = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)} \quad \text{y} \quad u_2 = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)},$$

$$\tilde{X}^{(0)}(z) \equiv 1,$$

$$X^{(0)}(z) \equiv 1,$$

$$\tilde{X}^{(n)}(z) = \begin{cases} \int_{z_0}^z \tilde{X}^{(n-1)}(s) u_0^2(s) r(s) ds, & n \text{ impar,} \\ \int_{z_0}^z \tilde{X}^{(n-1)}(s) \frac{1}{u_0^2(s) p(s)} ds, & n \text{ par,} \end{cases}$$

$$X^{(n)}(z) = \begin{cases} \int_{z_0}^z X^{(n-1)}(s) \frac{1}{u_0^2(s) p(s)} ds, & n \text{ impar,} \\ \int_{z_0}^z X^{(n-1)}(s) u_0^2(s) r(s) ds, & n \text{ par} \end{cases}$$

y además  $u_0$  es una solución particular de la ecuación homogénea de la ecuación diferencial principal.

De esta forma, se podrá utilizar la solución encontrada y trabajar en la ecuación de dispersión (6) para encontrar los modos propagados del sistema.

#### B. Pérdida por transmisión

La forma en la que se expondrán los resultados del campo acústico producido por la fuente de sonido es con base en los gráficos generados por el cálculo de la pérdida por transmisión [7, 10]

$$TL(r, z) = 20 \log_{10}(|U_N(r, z)|), \quad r = |x| \text{ [dB]} \quad (8)$$

donde

$$U_N(r, z) = \sum_{m=1}^n \frac{\varphi_{m,N}(z) \varphi_{m,N}(z_0) e^{j(r\mu_{m,N} + \pi/4)}}{\sqrt{8\pi\mu_{m,N}r}} \quad (9)$$

$\mu_{m,N}$  son los modos propagados del sistema encontrados en (6). Estos modos aquellas ondas que tendrán forma sinusoidal y que podrán propagarse a través del medio estratificado visto como una guía de onda. Cabe señalar que el número  $m$  de modos está relacionado inversamente con el grosor de la capa de hielo para este medio. Es decir, a mayor grosor de la capa de hielo, habrá menos número de modos.

Las funciones propias del problema  $\varphi_{m,N}(z)$  están definidas a continuación

$$\varphi_{m,N}(z) = \frac{1}{M_{m,N}} \begin{cases} \text{sen } \sqrt{k_i^2 - \mu_{m,N}^2} z, & 0 \leq z < h, \\ f_N(z, \mu_{m,N}), & h \leq z < H, \\ c_2(\mu_{m,N}) e^{-\sqrt{\mu_{m,N}^2 - k_b^2}(z-H)}, & z \geq H, \end{cases} \quad (10)$$

con

$$M_{m,N}^2 = \frac{1}{2\mu_{m,N}\rho_1} + \frac{1}{\rho_0} \int_h^H |f_N(z, \mu_{m,N})|^2 dz \quad (11)$$

y  $f_N(z, \mu_{m,N})$  es definida por el método SPSS por cada modo  $\psi_w$  obtenido.

Otro aspecto que abarca esta investigación es el estudio del efecto Doppler cuando la fuente se está desplazando. Para ello, se han empleado las siguientes ecuaciones de acuerdo con [7, 12]

Para el cálculo de la frecuencia de retardo se ha utilizado

$$-\mu_m(\omega)v(\tau) + \omega - \omega_0 = 0, \quad (12)$$

mientras que la ecuación (13) se ha utilizado para calcular el tiempo de retardo

$$\frac{|x - x_0(\tau)|}{v_m(\omega)} - (t - \tau) = 0. \quad (13)$$

### III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los gráficos mostrados en esta sección han sido generados con la programación de la Ecuación (8). Se han propuesto ciertas características en común.  $c_i = 3500$  m/s,  $c_w = 1450$  m/s,  $c_b = 2000$  m/s,  $\rho_i = 0.9$  g/cm<sup>3</sup>,  $\rho_w = 1.0$  g/cm<sup>3</sup>,  $\rho_b = 2.0$  g/cm<sup>3</sup>, frecuencia de operación de la fuente  $\omega = 50$  Hz,  $h = 10$  m,  $H - h = 180$  m.

La Figura 2 muestra la comparación del campo acústico cuando la fuente se ubica a tanto a 10 m como a 50 m de profundidad pero el receptor se mantiene constante a 100 m de profundidad. A su vez, entre estos dos componentes hay una separación horizontal de 30 km.

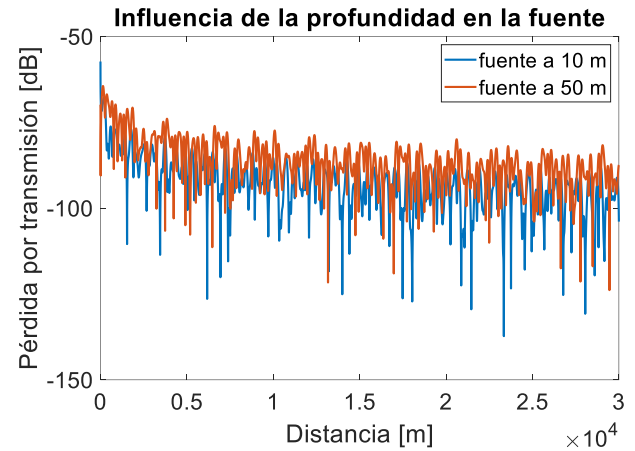


Figura 2. Influencia de la profundidad a la que se ubica la fuente.

En la Figura 3 se muestra la comparación del campo acústico cuando la capa de hielo  $h$  mide tanto 10 m como 5 m. En el cálculo se han encontrado más modos propagados, cuando la capa de hielo es menor.

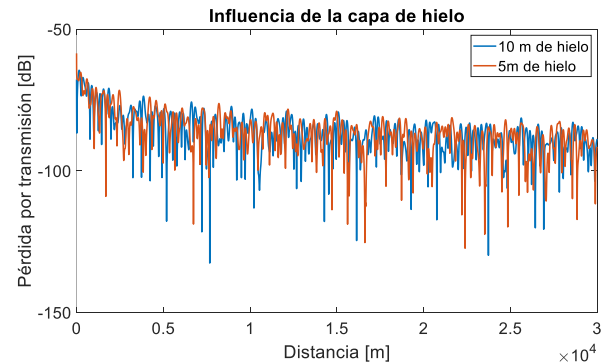


Figura 3. Influencia de la capa de hielo.

Como parte de los resultados obtenidos en el cálculo del efecto Doppler, se presenta la Figura 4. Por simplicidad, se presenta una ventana de tiempo de entre 10 s a 450 s, es decir,

durante 440 segundos se grafica el retardo en frecuencia y en tiempo de uno de los modos encontrados al propagarse por el medio. Asimismo, se propone que  $x_0 = (0.005t^2 + 10t, 0, 10)$  [m] sea el vector función que muestra el desplazamiento de la fuente acústica, también que la fuente y el receptor estén separados 30 km. Se ha asumido que la profundidad a la que se ha colocado la fuente es de 30 m, mientras que la del receptor es de 100 m.

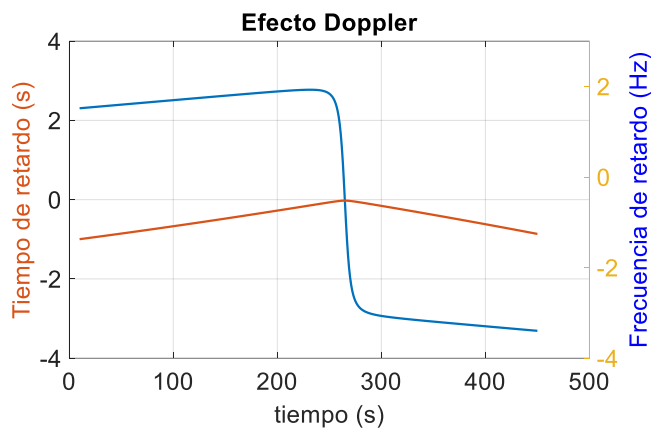


Figura 4. Efecto Doppler debido al desplazamiento de la fuente.

#### IV. CONCLUSIONES

Se han hecho rutinas en Matlab para generar todas estas gráficas y resultados. En ellos se ha encontrado que el número de modos propagados es inversamente proporcional al grosor de la capa de hielo. Como se aprecia en la Figura 2, se muestra una clara diferencia del campo acústico entre una condición y la otra, sugiriendo una atenuación debida a la profundidad de la fuente y receptor. Por otro lado, en la Figura 3, se muestra que el campo acústico no se ve drásticamente afectado debido a la capa de hielo, lo cual era de interés en este trabajo. Al considerar el vector de posición de la fuente y la separación se puede calcular que aproximadamente a los 265 s la fuente alcanzará al receptor, lo cual se comprueba claramente en la Figura 4. Se aprecia cómo hay un cambio en el sentido antes y después de este tiempo, y en ambos casos, la frecuencia de retardo y el tiempo de retardo tienen a cero lo cual sugieren que la fuente y el receptor estén en la misma posición. El uso del método SPPS ha ofrecido también aproximaciones bastante exactas en comparación con el método analítico, al comparar ambos métodos y resultados, el error relativo calculado máximo fue de  $3 \times 10^{-6}$ .

#### AGRADECIMIENTOS

AIVY agradece profundamente al CONAHCyT por el apoyo y confianza brindada para el desarrollo de este proyecto de investigación. Del mismo modo, al Instituto Politécnico Nacional a través del programa BEIFI por el apoyo brindado. VR agradece el apoyo del CONAHCYT a través del proyecto

Frontera 15022, y al Instituto Politécnico Nacional por el apoyo con los estímulos SIBE y EDI. RCP agradece el apoyo del CONAHCYT a través del proyecto Frontera 15022, y al Instituto Politécnico Nacional por el apoyo con los estímulos SIBE y EDI.

#### REFERENCIAS

- [1] Medwin, H. (1998), *Fundamentals of Acoustical Oceanography*, EUA, Academic Press.
- [2] Brekhovskikh, L. M., & Lysanov, Y. P. (2003b). *Fundamentals of Ocean Acoustics*. En *Modern acoustics and signal processing*. <https://doi.org/10.1007/b97388>.
- [3] Pak, E. V. (2022). *The handbook of the arctic: A broad and comprehensive overview* (E. V. Pak, A. I. Krivtsov, & N. S. Zagrebnaya, Eds.; 1a ed.). Springer.
- [4] Camargo, O. (2023), *Fundamentals of Underwater Acoustics*, Springer Nature.
- [5] Jensen, F. (2011), Kuperman, W. A., Porter, M. B. *Computational Ocean Acoustics*, EUA, Springer C.
- [6] Kinsler, L. (1992). *Fundamentos de acústica*. Limusa.
- [7] Hernández, J. (2016, agosto 1). *Spectral parameter power series method in underwater acoustic wave propagation*. [Tesis de doctorado]. Instituto Politécnico Nacional, México.
- [8] Castillo-Pérez, R., Kravchenko, V. V., & Torba, S. M. (2015). Analysis of graded-index optical fibers by the spectral parameter power series method. *Journal Of Optics*, 17(2), 025607. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/17/2/025607>.
- [9] Khmelnytskayaa, K. (2014, junio 26). *Eigenvalue problems, spectral parameter power series, and modern applications*. John Wiley & Sons, pp.1945-1969.
- [10] Rabinovich, V., Hernández-Juárez, J. (2014). Method of the spectral parameter power series in problems of underwater acoustics of the stratified ocean. *Mathematical methods in applied sciences*, 1990-1999. DOI: 10.1002/mma.3197.
- [11] Castillo-Perez, R., Ek-Ek, J. R., Jacome-Peñaherrera, C. E., Jauregui-Vazquez, D., Sanchez-Lara, R., Offerhaus, H. L., & Alvarez-Chavez, J. A. (2023). Comparative modal analysis in micro–nano-optical fiber tapers using spectral parameter power series method and exact modes method. *Journal of Computational Electronics*, 22(2), 690–697. <https://doi.org/10.1007/s10825-023-02006-y>.
- [12] Obrezanova, O., Rabinovich, V. (1998). Acoustic field generated by moving sources in stratified waveguides. 27(2). 155-167. [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(97\)00039-5](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(97)00039-5).